用蒙地卡洛方法研究正交最小平方估計量

許瑜莉

一、引言

設X與Y爲兩個相關之隨機變數。滿足關係模式 $\beta_1Y+\beta_2X=\beta_0$。將 $\beta_1Y+\beta_2X=\beta_0$ 去適配（fitting）一組資料點，其意義即是在某些條件下估計未知參數 β_1，β_2 及 β_0 之值，以求得最佳之適配。本文所用之準據（critiern）是垂直最小平方法，此條件就本文所處理的特殊模式而言，相當於最大概度法（maximum likelihood criterion）。

例：假設某人從事甲、乙兩類不同的工作，完成甲類工作平均須時 t_1，完成乙類工作平均須時 t_2，在任一星期中（工作五天，每天八小時），此人任意選做此兩項工作。設 Y_1 代表做甲類工作的次數，Y_2 代表做乙類工作的次數。則 Y_1，Y_2 爲隨機變數並滿足下列關係。

$$t_1Y_1+t_2Y_2\approx c$$

問題：在某一星期內，隨機地給予一對 Y_1，Y_2 值，讓我們估計在該星期中所完成的工作量 $W=t_1Y_1+t_2Y_2$ 爲多少？即我們要估計 t_1 及 t_2 之值。

二、最大概度估計法（Maximum Likelihood Estimation）

假設一組大小爲 n 之隨機樣本（Y_{1i}，Y_{2i}），$i=1,2,\cdots,n$，是取自雙維常態母群體（bivariate normal distribution），或更明白地說，

$$Y_{1i}=(X_{1i}+\mu_1)\cos\theta-(X_{2i}+\mu_2)\sin\theta$$
$$Y_{2i}=(X_{1i}+\mu_1)\sin\theta+(X_{2i}+\mu_2)\cos\theta$$

其中

X_{1i} 與 X_{2i} 互爲獨立之隨機變數，各服從以 0 爲均數，以 σ_1^2 及 σ_2^2 爲變異數之常態分配，也就是（X_{1i}，X_{2i}）^{t}，$i=1,2,\cdots,n$ 爲隨機向量（randon vectors），

取自雙維常態母群N(μ_0 , Σ)，均數向量 (mean vector) $\mu_0=(0,0)^t$ ，變異數矩陣爲

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

即，(Y_{1i} , Y_{2i}) 是 (X_{1i} , X_{2i}) 經平移及轉角之結果。此點簡述如下：

因 $X_{1i} \sim N(0, \sigma_{11})$, $X_{2i} \sim N(0, \sigma_{22})$

故 $X_{1i}+\mu_1 \sim N(\mu_1, \sigma_{11})$, $X_{2i}+\mu_2 \sim N(\mu_2, \sigma_{22})$

即將 (X_{1i} , X_{2i}) 平移至 (X_{1i}' , X_{2i}')，其中 $X_{1i}'=X_{1i}+\mu_1$, $X_{2i}'=X_{2i}+\mu_2$ ，再將其旋轉 $-\theta$ 角至 (Y_{1i} , Y_{2i}) ，則得

$$X_{1i}+\mu_1=Y_{1i}\cos\theta+Y_{2i}\sin\theta$$

$$X_{2i}+\mu_2=-Y_{1i}\sin\theta+Y_{2i}\cos\theta$$

因此，解此兩方程式得

$$Y_{1i}=(X_{1i}+\mu_1)\cos\theta-(X_{2i}+\mu_2)\sin\theta$$

$$Y_{2i}=(X_{1i}+\mu_1)\sin\theta+(X_{2i}+\mu_2)\cos\theta$$

因 $(X_{1i}, X_{2i})^t \sim N(0, \Sigma)$, $i=1,2,\cdots,n$ 。 X_{1i} 與 X_{2i} 之結合機率密度函數爲

$$f(x_{1i}, x_{2i})=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp-\left[\frac{x_{1i}^2}{2\sigma_{11}}+\frac{x_{2i}^2}{2\sigma_{22}}\right]$$

其中 $\sigma_1^2=\sigma_{11}$, $\sigma_2^2=\sigma_{22}$ 。

由 $x_{1i}=y_{1i}\cos\theta+y_{2i}\sin\theta-\mu_1$

$x_{2i}=-y_{1i}\sin\theta+y_{2i}\cos-\mu_2$

得轉換之 Jacobian 爲1 ，故隨機變數 Y_{1i} 與 Y_{2i} 之結合機率密度函數爲

$$g(y_{1i}, y_{2i})=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp-\left[\frac{1}{2\sigma_{11}}(y_{1i}\cos\theta+y_{2i}\sin\theta-\mu_1)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sigma_{22}}(y_{2i}\cos-y_{1i}s\theta-\mu_2)^2\right]$$

對應於樣本值 (y_{11} , y_{21}), … , (y_{1n} , y_{2n}) 的概度函數 (the likelihood function) 爲

$$L(\mu, \Sigma, \theta)=L(\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \theta)=\prod_{i=1}^{n} g(y_{1i}, y_{2i})$$

$$=\frac{1}{(2\pi\sigma_1\sigma_2)^n}\exp-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_{11}}\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta+y_{2i}\sin\theta-\mu_1)^2+\frac{1}{\sigma_{22}}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i}\cos\theta-y_{1i}\sin\theta\right.$$

$-\mu_2)^2]$

因爲 lnL 爲 L 之嚴格增函數，故 lnL 與 L 在同一 (μ, Σ, θ) 處有其極大值。

利用對數得

$$\ln L = -n\ln(2\pi\sigma_1\sigma_2) - \frac{1}{2\sigma_{11}}\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta - y_{2i}\sin\theta - \mu_1)^2$$

$$-\frac{1}{2\sigma_{22}}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i}\cos\theta - y_{1i}\sin\theta - \mu_2)^2$$

因此 (μ, Σ, θ) 之最大概度估計值 $(\widehat{\mu}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\theta})$ 爲下列方程之解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \Sigma} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

即解下列方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{11}} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{22}} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

今 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\dfrac{1}{2\sigma_{11}} \cdot 2\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta + y_{2i}\sin\theta - \mu_1)(-1)$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta + y_{2i}\sin\theta - \mu_1) = 0$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} y_{1i}\Big)\cos\theta + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_{2i}\Big)\sin\theta - n\mu_1 = 0$$

$$\therefore \hat{\mu}_1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i}}{n}\right)\cos\theta + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{2i}}{n}\right)\sin\theta$$

$$= \bar{y}_1\cos\theta + \bar{y}_2\sin\theta$$

同理，$\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_2 = \bar{y}_2\cos\theta - \bar{y}_1\sin\theta$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{11}} = -n\cdot\frac{2\pi\sigma_2/2\sqrt{\sigma_{11}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2\sigma_{11}{}^2}\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta + y_{2i}\sin\theta - \mu_1)^2$$

$$= \frac{n}{2\sigma_{11}} + \frac{1}{2\sigma_{11}{}^2}\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta + y_{2i}\sin\theta - \mu_1)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{11}} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}\cos\theta + y_{2i}\sin\theta - \hat{\mu}_1)^2$$

$$或\ \hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(y_{1i} - \bar{y}_1)\cos\theta + (y_{2i} - \bar{y}_2)\sin\theta\right]^2$$

同理，$\dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{22}} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_{22} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_{2i}\cos\theta - y_{1i}\sin\theta - \hat{\mu}_2)^2$

$$或\ \hat{\sigma}_{22} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(y_{2i} - \bar{y}_2)\cos\theta - (y_{1i} - \bar{y}_1)\sin\theta\right]^2$$

式中 $\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$，$\hat{\sigma}_{11}$ 及 $\hat{\sigma}_{22}$ 分別代表 μ_1，μ_2，σ_{11} 及 σ_{22} 之估計值。

今將 $\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$，$\hat{\sigma}_{11}$ 及 $\hat{\sigma}_{22}$ 視爲 θ 之函數代入概度函數中，得

$$L = \frac{1}{(2\pi)^n(\hat{\sigma}_{11}\cdot\hat{\sigma}_{22})^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}_{11}}\cdot n\hat{\sigma}_{11} - \frac{1}{2\hat{\sigma}_{22}}\cdot n\hat{\sigma}_{22}\right)$$

$$= \frac{1}{e^n(2\pi)^n(\hat{\sigma}_{11}\cdot\hat{\sigma}_{22})^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(2\pi e)^n(\hat{\sigma}_{11}\cdot\hat{\sigma}_{22})^{\frac{n}{2}}}$$

於是，使概度函數爲極大之問題，變化爲使 $\hat{\sigma}_{11}\cdot\hat{\sigma}_{22}$ 對 θ 而言成爲極小之問題。

以下即在求使 $\hat{\sigma}_{11}\cdot\hat{\sigma}_{22}$ 成爲極小的 θ 的估計量（estimator）$\hat{\theta}$。已知 μ_1 及 μ_2 之估計量爲

$$\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_1\cos\theta + \bar{Y}_2\sin\theta$$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}_2\cos\theta - \bar{Y}_1\sin\theta$$

今設

$$A_{11}=\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)^2$$

$$A_{12}=\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)(Y_{2i}-\overline{Y}_2)$$

$$A_{22}=\sum_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\overline{Y}_2)^2$$

則

$$\hat{6}_{11}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(Y_{1i}-\overline{Y}_1)\cos\theta+(Y_{2i}-\overline{Y}_2)\sin\theta]^2$$

$$=\frac{1}{n}\{[\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)^2]\cos^2\theta+[\sum_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\overline{Y}_2)^2]\sin^2\theta$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)(Y_{2i}-\overline{Y}_2)\sin\theta\cos\theta\}$$

$$=\frac{1}{n}[A_{11}\cos^2\theta+A_{22}\sin^2\theta+2A_{12}\sin\theta\cos\theta]$$

同理，$\hat{6}_{22}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(Y_{2i}-\overline{Y}_2)\cos\theta-(Y_{1i}-\overline{Y}_1)\sin\theta]^2$

$$=\frac{1}{n}[A_{22}\cos^2\theta+A_{11}\sin^2\theta-2A_{12}\sin\theta\cos\theta]$$

但 $\hat{6}_{11}\cdot\hat{6}_{22}=\frac{1}{n^2}\{(A_{11}\cos^2\theta+A_{22}\sin^2\theta)(A_{11}\sin^2\theta+A_{22}\cos^2\theta)+2A_{12}\sin\theta\cos\theta\cdot[$

$A_{11}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+A_{22}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]-4A_{12}^2\sin^2\theta\cos^2\theta\}$

$$=\frac{1}{n^2}\{[A_{11}^2\sin^2\theta\cos^2\theta+A_{11}A_{22}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+A_{22}\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

$$+A_{11}\sin2\theta(A_{22}-A_{11})\cos2\theta-A_{12}^2\sin^2 2\theta\}$$

$$=\frac{1}{n^2}[(A_{11}A_{22}-A_{12})^2+(A_{22}-A_{11})^2\sin^2\theta\cos^2\theta+A_{12}\cos2\theta\cdot$$

$$(A_{22}-A_{11})\sin2\theta+A_{12}^2\cos^2 2\theta]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[(A_{11}A_{22}-A_{12})^2+A_{12}^2\cos^2 2\theta+\frac{1}{4}(A_{22}-A_{11})^2\sin^2 2\theta+2A_{12}\cos 2\theta\cdot\frac{1}{2}(A_{22}-A_{11})\sin 2\theta\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}(A_{11}A_{22}-A_{12})^2+\frac{1}{n^2}\left[A_{12}\cos 2\theta+\frac{1}{2}(A_{22}-A_{11})\sin 2\theta\right]^2$$

此函數當最後一項為零時為極小，即當

$$A_{12}\cos 2\theta+\frac{1}{2}(A_{22}-A_{11})\sin 2\theta=0$$

或 $\tan 2\theta=\dfrac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}$

因為反正切函數 $\tan^{-1}$ 非一對一，故 $\hat{\theta}$ 用下列準據選取：

令 $\hat{\theta}^*=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}\right)$

其中 $\tan^{-1}(\cdot)$表主值，$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\tan^{-1}(\cdot)<\dfrac{\pi}{2}\right)$

當$A_{12}>0$ 時；

若$A_{11}>A_{22}$， 取$\hat{\theta}=\hat{\theta}^*$ ， 故$0<\hat{\theta}<\dfrac{\pi}{4}$

若$A_{11}<A_{22}$， 取$\hat{\theta}=-\hat{\theta}^*$， 故$\dfrac{\pi}{4}<\hat{\theta}<\dfrac{\pi}{2}$

若$A_{11}=A_{22}$， 取$\hat{\theta}=\dfrac{\pi}{4}$

當$A_{12}<0$ 時；

若$A_{11}>A_{22}$， 取$\hat{\theta}=\hat{\theta}^*$ ， 故$-\dfrac{\pi}{4}<\hat{\theta}<0$

若$A_{11}<A_{22}$， 取$\hat{\theta}=-\hat{\theta}^*$， 故$-\dfrac{\pi}{2}<\hat{\theta}<-\dfrac{\pi}{4}$

若$A_{11}=A_{22}$， 取$\hat{\theta}=-\dfrac{\pi}{4}$

當$A_{12}=0$ 時；

若$A_{11}\geqslant A_{22}$， 取$\hat{\theta}=0$

若$A_{11}<A_{22}$， 取$\hat{\theta}=\dfrac{\pi}{2}$

三、正交最小平方估計法（Orthogonal Least Squares Estimation）

自觀測值（Y_{1i}，Y_{2i}）$i=1$，2，…，n 到直線 $t_1Y_1+t_2Y_2=c$ 的垂直距離為

$$d_i=\frac{|t_1Y_{1i}+t_2Y_{2i}-c|}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}$$

且垂直距離的平方和為

$$SS=\sum_{i=1}^{n}d_i^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_1Y_{1i}+t_2Y_{2i}-c)^2}{t_1^2+t_2^2}$$

首先，我們求使 SS 為極小的C值：

$$令\ \frac{\partial SS}{\partial c}=0\ ，得$$

$$nc=t_1(\sum_{i=1}^{n}Y_{1i})+t_2(\sum_{i=1}^{n}Y_{2i})=t_1(n\overline{Y}_1)+t_2(n\overline{Y}_2)$$

$$故\ \hat{c}=t_1\overline{Y}_1+t_2\overline{Y}_2$$

c 以 $\hat{c}$ 代入，得

$$SS=\frac{\sum_{i=1}^{n}[t_1(Y_{1i}-\overline{Y}_1)+t_2(Y_{2i}-\overline{Y}_2)]^2}{t_1^2+t_2^2}$$

於是，令 $t_1=t\cos\theta$，$t_2=t\sin\theta$，則得

$$SS=\frac{\sum_{i=1}^{n}[(Y_{1i}-\overline{Y}_1)t\cos\theta+(Y_{2i}-\overline{Y}_2)t\sin\theta]^2}{t^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)^2t^2\cos^2\theta+\sum_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\overline{Y}_2)^2t^2\sin^2\theta+2\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)(Y_{2i}-\overline{Y}_2)}{t^2}$$

或 $SS=A_{11}\cos^2\theta+2A_{12}\sin\theta\cos\theta+A_{22}\sin^2\theta$

其中

$$A_{11}=\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)^2$$

$$A_{12}=\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)(Y_{2i}-\overline{Y}_2)$$

$$A_{22}=\sum_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\overline{Y}_2)^2$$

我們注意到 SS 與 $n\hat{6}_{11}$同樣是θ的同一函數。因此，可求使 SS 爲極小的θ值：

$$\frac{\partial SS}{\partial\theta}=0\Rightarrow -2A_{11}\cos\theta\sin\theta+2A_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2A_{22}\sin\theta\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow 2A_{12}\cos 2\theta+(A_{22}-A_{11})\sin 2\theta=0$$

或 $\tan 2\theta=\dfrac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}$

$\hat{\theta}$可用第二節所用的同一準據選取。

故垂直最小平方估計量與最大概度估計量一致。

根據前述結果，在我們處理引言中所提問題時，我們可以適當的定義時間單位，而取 $\hat{t}_1=\cos\hat{\theta}$，$\hat{t}_2=\sin\hat{\theta}$（不失一般性地，令 $t=1$）。於是，給予Y_1及Y_2時，所估計到的工作量爲 $\hat{W}=\hat{t}_1Y_1+\hat{t}_2Y_2$，如果我們能找到一個$\theta$的信賴區間（confidence interval），則我們同時亦可找到工作量的信賴區間。

i.e. $W=Y_1\cos\theta+Y_2\sin\theta$

且 $P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha$

$\Rightarrow P(\hat{W}_1<W<\hat{W}_2)=1-\alpha$

我們可就θ之漸近變異數（asymptotic variance）6_θ^2，使用其最大概度估計值$\hat{6}_\theta^2$，以求得θ之信賴區間。我們將在第四節中討論$\hat{\theta}$之漸近變異數。其次我們假設 $\dfrac{\hat{\theta}-\theta}{\hat{6}_\theta}$ 近似於一個標準常態之隨機變數。因此，例如 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}-1.645\hat{6}_\theta$ 與 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}+1.645\hat{6}_\theta$ 爲θ之近似的信賴度 90% 的信賴區間之界限。

四、估計量之漸近特性（Asymtotic Properties of the Estimator）

因爲估計量$\hat{\theta}$之精確分配極爲複雜，我們轉而研究$\hat{\theta}$之漸近分配。

我們利用下列兩定理求得$\hat{\theta}$之漸近分配。此兩定理之證明請參考 Anderson (1)。

定理一：令 $A(m)=\sum_{\alpha=1}^{n}(Y_\alpha-\overline{Y}_n)(Y_\alpha-\overline{Y}_n)^t$，其中 $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ 互爲獨立，且服從分配 $N(\mu,\Sigma)$，$m=n-1$。則 $B(m)=\dfrac{1}{\sqrt{m}}[A(m)-m\Sigma]$ 之漸近分配（$n\to\infty$）爲常態分配，其均數爲 0，且互變異數（互變異數矩陣之元素）爲

$$E(b_{ij}(m)\,b_{kl}(m)) = v_{ik}\,v_{jl} + v_{il}\,v_{jk}$$

其中，$b_{ij}(m)$ 代表矩陣 $B(m)$中第 i 列第 j 行之元素，而

v_{ik} 代表矩陣 $\sum$ 中第 i 列第 k 行之元素。

定理二：令$U(m)$爲含有 k 個分量之隨機向量，b 爲固定向量。設$\sqrt{m}\,(U(m)-b)$之漸近分配爲$N(0, T)$。令$w=f(u)$爲向量 u 的函數，其在$U=b$之附近的一、二次導數均存在。令 $\left.\dfrac{\partial f(u)}{\partial u_i}\right|_{u=b}$ 爲ϕ_b之第 i 個分量。則$\sqrt{m}\,[f(U(m))-f(b)]$之極限分配爲

$$N(0, \phi_b^t\, T\, \phi_b)$$

其中ϕ_b^t表ϕ_b之轉置（transpose）

在我們所考慮的問題中，$Y_i=(Y_{1i}, Y_{2i})^t$，$i=1, 2, \cdots n$。設$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$互爲獨立，各服從雙維常態分配$N(\mu, \sum)$，其中

$$\begin{aligned}\mu &= (EY_{1i}, EY_{2i})^t\\ &= (\mu_1\cos\theta-\mu_2\sin\theta,\ \mu_1\sin\theta+\mu_2\cos\theta)^t\end{aligned}$$

$\sum = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12}\\ v_{12} & v_{22}\end{pmatrix}$，此處

$$v_{11}=\sigma_{11}\cos^2\theta+\sigma_{22}\sin^2\theta$$

$$v_{12}=(\sigma_{11}-\sigma_{22})\sin\theta\cos\theta$$

$$v_{22}=\sigma_{11}\sin^2\theta+\sigma_{22}\cos^2\theta$$

因爲

$$\begin{aligned}EY_{1i} &= E[(X_{1i}+\mu_1)\cos\theta-(X_{2i}+\mu_2)\sin\theta]\\ &= E[(X_{1i}\cos\theta-X_{2i}\sin\theta)+(\mu_1\cos\theta-\mu_2\sin\theta)]\\ &= \cos\theta EX_{1i}-\sin\theta EX_{2i}+(\mu_1\cos\theta-\mu_2\sin\theta)\\ &= \mu_1\cos\theta-\mu_2\sin\theta \quad (\text{因已知 } EX_{1i}=EX_{2i}=0)\end{aligned}$$

同理，

$$EY_{2i}=\mu_1\sin\theta+\mu_2\cos\theta$$

$$\begin{aligned}v_{11}=VY_{1i} &= V[(\cos\theta X_{1i}-\sin\theta X_{2i})+(\mu_1\cos\theta-\mu_2\sin\theta)]\\ &= V(\cos\theta X_{1i}-\sin\theta X_{2i})=\cos^2\theta\, VX_{1i}+(-\sin\theta)^2 VX_{2i}\\ &= \cos^2\theta\cdot\sigma_{11}+\sin^2\theta\cdot\sigma_{22}\end{aligned}$$

同理，$v_{22} = VY_{2i} = 6_{11}\sin^2\theta + 6_{22}\cos^2\theta$

$$
\begin{aligned}
v_{12} &= \mathrm{cov}(Y_{1i}, Y_{2i}) = E[(Y_{1i} - EY_{1i})(Y_{2i} - EY_{2i})] \\
&= E[(X_{1i}\cos\theta - X_{2i}\sin\theta)(X_{1i}\sin\theta + X_{2i}\cos\theta)] \\
&= E[(X_{1i}^2 - X_{2i}^2)\sin\theta\cos\theta + X_{1i}X_{2i}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)] \\
&= \sin\theta\cos\theta(EX_{1i}^2 - EX_{2i}^2) + \cos 2\theta \cdot E(X_{1i} \cdot X_{2i}) \\
&= \sin\theta\cos\theta(VX_{1i} - VX_{2i}) \quad (\text{因} X_{1i} \text{與} X_{2i} \text{互為獨立}) \\
&= (6_{11} - 6_{22})\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

今取 $U(m) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{m} \\ \frac{A_{12}}{m} \\ \frac{A_{22}}{m} \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$

則 $B(m) = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} = \sqrt{m}(U(m) - b) = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\left(\frac{A_{11}}{m} - v_{11}\right) \\ \sqrt{m}\left(\frac{A_{12}}{m} - v_{12}\right) \\ \sqrt{m}\left(\frac{A_{22}}{m} - v_{22}\right) \end{pmatrix}$

由定理一得B(m)之漸近分配為

$$N(0, T)$$

其中，互變異數矩陣T為

$$T = (Eb_{ij}(m)\, b_{kl}(m)) = (V_{ik}V_{jl} + V_{il}V_{jk})$$

$$
= \begin{pmatrix}
v_{11}v_{11} + v_{11}v_{11} & v_{11}v_{12} + v_{12}v_{11} & v_{12}v_{12} + v_{12}v_{12} \\
v_{11}v_{12} + v_{12}v_{11} & v_{11}v_{22} + v_{12}v_{21} & v_{12}v_{22} + v_{12}v_{22} \\
v_{12}v_{12} + v_{12}v_{12} & v_{12}v_{22} + v_{12}v_{22} & v_{22}v_{22} + v_{22}v_{22}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
2v_{11}^2 & 2v_{11}v_{12} & 2v_{12}^2 \\
2v_{11}v_{12} & v_{12}^2 + v_{11}v_{22} & 2v_{12}v_{22} \\
2v_{12}^2 & 2v_{12}v_{22} & 2v_{22}^2
\end{pmatrix}
$$

取 $f(U(m)) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2A_{12}}{m}}{\frac{A_{11}}{m} - \frac{A_{22}}{m}}\right) = \hat{\theta}$

或 $f(u) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2u_2}{u_1 - u_3}\right)$

顯然，上面所定義之 $U(m)$，b，及T滿足定理二中之條件，又函數 f(u) 亦滿足條件，則 ϕ_b 之元素爲

$$\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}\right|_{u=b} = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2u_2\cdot\frac{-1}{(u_1-u_3)^2}}{1+\left(\frac{2u_3}{u_1-u_3}\right)^2}\right|_{u=b} = \left.\frac{-u_2}{(u_1-u_3)^2+4u_2^2}\right|_{u=b} = \frac{-v_{12}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}$$

$$\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u_2}\right|_{u=b} = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\frac{2}{u_1-u_3}}{1+\left(\frac{2u_2}{u_1-u_3}\right)^2}\right|_{u=b} = \left.\frac{u_1-u_3}{(u_1-u_3)^2+4u_2^2}\right|_{u=b} = \frac{v_{11}-v_{22}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}$$

$$\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u_3}\right|_{u=b} = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2u_2\cdot\frac{-(-1)}{(u_1-u_3)^2}}{1+\left(\frac{2u_2}{u_1-u_3}\right)^2}\right|_{u=b} = \left.\frac{u_2}{(u_1-u_3)^2+4u_2^2}\right|_{u=b} = \frac{v_{12}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}$$

且 $f(b) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2v_{12}}{v_{11}-v_{22}}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2(\sigma_{11}-\sigma_{22})\sin\theta\cos\theta}{\sigma_{11}(\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sigma_{22}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan 2\theta) = \frac{1}{2}(2\theta) = \theta$$

由定理二知，

$\sqrt{m}\,(f(U(m)) - f(b)) = \sqrt{m}\,(\hat{\theta} - \theta)$ 之極限分配爲

$N(0, T_1)$

其中 $\sqrt{m}\,(\hat{\theta} - \theta)$ 之漸近變異數 T_1 爲

$$T_1=\phi_b^t\,T\,\phi_b=\frac{v_{11}v_{22}-v_{12}^2}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}=\frac{\sigma_{11}\ \sigma_{22}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}$$

故 $\hat{\theta}$ 之漸近分配爲以 θ 爲均數，σ_θ^2 爲變異數之常態分配。

$$\sigma_\theta^2=\frac{T_1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}\quad（與\ \theta\ 無關）$$

σ_θ^2 之最大概度估計量爲

$$\hat{\sigma}_\theta^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{v_{11}\cdot v_{22}-v_{12}^2}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{(A_{11}-A_{22})^2+4A_{12}^2}$$

矩陣T_1之計算大略如下：

$$T_1=\begin{pmatrix}\dfrac{-v_{12}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}\\[2ex]\dfrac{v_{11}-v_{22}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}\\[2ex]\dfrac{v_{12}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}2v_{11}^2 & 2v_{11}v_{12} & 2v_{12}^2\\ 2v_{11}v_{12} & v_{12}^2+v_{11}v_{22} & 2v_{12}v_{22}\\ 2v_{12}^2 & 2v_{12}v_{22} & 2v_{22}^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{-v_{12}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}\\[2ex]\dfrac{v_{11}-v_{22}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}\\[2ex]\dfrac{v_{12}}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{[(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2]^2}(-v_{12},v_{11}-v_{22},v_{12})\begin{pmatrix}2v_{11}^2 & 2v_{11}v_{12} & 2v_{12}^2\\ 2v_{11}v_{12} & v_{12}^2+v_{11}v_{22} & 2v_{12}v_{22}\\ 2v_{12}^2 & 2v_{12}v_{22} & 2v_{22}^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-v_{12}\\ v_{11}-v_{22}\\ v_{12}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{[(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2]^2}\circ(-2v_{12}(v_{11}v_{22}-v_{12}^2),(v_{11}-v_{22})(v_{11}v_{22}-v_{12}^2),$$

$$2v_{12}(v_{11}v_{22}-v_{12}^2))\cdot\begin{pmatrix}-v_{12}\\ v_{11}-v_{22}\\ v_{12}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{[(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2]^2}\cdot(2v_{12}^2(v_{11}v_{22}-v_{12}^2)+(v_{11}v_{22}-v_{12}^2)(v_{11}-v_{22})^2$$

$$+2v_{12}^2(v_{11}v_{22}-v_{12}^2))$$

$$=\frac{v_{11}v_{22}-v_{12}^2}{(v_{11}-v_{22})^2+4v_{12}^2}=\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}(\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)}{[(\sigma_{11}-\sigma_{22})(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]^2+[(\sigma_{11}-\sigma_{22})2\sin\theta\cos\theta]^2}$$

$$=\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)}=\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}$$

五、用蒙地卡洛(Monte Carlo)方法作估計量之研究

爲了探討估計量的有限樣本性質，我們利用蒙地卡洛方法來研究。

蒙地卡洛方法研究的步驟：

1. 由電子計算機自雙維常態母群體 $N(0,\Sigma)$，$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \sigma_{22}\end{pmatrix}$，取 (X_{11},X_{21})，(X_{12},X_{22})，…，(X_{1n},X_{2n})（n 事先定好）n 組樣本。

2. 其次依

$$Y_{1i}=X_{1i}\cos\theta-X_{2i}\sin\theta$$

$$Y_{2i}=X_{1i}\sin\theta+X_{2i}\cos\theta$$

轉換成 (Y_{1i},Y_{2i}) 之樣本。

其中 θ 爲一指定之轉角，（我們取 $\mu_1=\mu_2=0$）。

3. 計算估計量 $\hat{\theta}$ 及 $\hat{\sigma}_\theta^2$ 之值；並求信賴係數爲 $1-\alpha$ 之信賴區間。$\hat{\theta}$ 滿足 $\tan 2\hat{\theta}=\frac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}$，並依第二節中之準據選取。

$$\hat{\sigma}_\theta^2=\frac{1}{n}\;\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{(A_{11}-A_{22})^2+4A_{12}^2}$$

因 $\hat{\theta}\longrightarrow N(\theta,\sigma_\theta^2)$，$\sigma_\theta^2=\frac{T_1}{n}=\frac{1}{n}\;\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2}$

故 $\frac{\hat{\theta}-\theta}{\hat{\sigma}_\theta}\rightarrow N(0,1)$

由 $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_\theta}<z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$

得 $P\left(\hat{\theta}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\sigma}_\theta<\theta<\hat{\theta}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\sigma}_\theta\right)=1-\alpha$

知具有信賴係數 $1-\alpha$ 之 θ 的近似信賴區間爲

$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]=[\hat{\theta}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\sigma}_\theta,\ \hat{\theta}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\sigma}_\theta]$

其中 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 使 $P(Z>z_{\frac{\alpha}{2}})=\frac{\alpha}{2}$，$Z\sim N(0,1)$

故 $1-\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=\frac{\alpha}{2}$，$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

例如，$1-\alpha=0.90$ 時，$z_{\frac{\alpha}{2}}=\Phi^{-1}(0.95)=1.645$

4. 重複步驟1至3共N次。（N事先決定）。

5. 比較 $\hat{\theta}$ 之N個值的經驗分配與理論的漸近常態分配。檢查 $\hat{6}^2_{\theta}$ 之經驗分配。數出包含 θ 之某特定值的信賴區間的個數。

6. 就每一組N，n，6_{11}，6_{22}，θ 之給予值，重複步驟4及5。在本研究中所選用的值是：N=100；n=5，10，30；$6_{22}=1$；$6_{11}=100$，25，4；$\theta=0°$，10°，45°，90°。

蒙地卡洛結果

樣本均數（表中所列數值以徑表之，每一數值均根據 $\hat{\theta}$ 的N=100個值而得）

6_{11}	n	0° = 0 徑	10° = 0.17徑	45° = 0.79徑	90° = 1.57徑
	5	0.0004	0.1837	0.7796	1.577
100	10	0.0025	0.1682	0.7908	1.570
	30	−0.0003	0.1753	0.7883	1.570
	5	0.0035	0.1662	0.7855	1.569
25	10	−0.0088	0.1674	0.7915	1.574
	30	0.0058	0.1691	0.7873	1.567
	5	0.0100	0.0617	0.5836	1.614
4	10	0.0382	0.1403	0.7381	1.539
	30	−0.0035	0.1583	0.7920	1.563

樣本變異數

6_{11}	n	理論的 (與θ無關)	0°	10°	45°	90°
	5	0.0020	0.0030	0.0026	0.0048	0.0037
100	10	0.0010	0.0011	0.0014	0.0011	0.0017
	30	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0004
	5	0.0087	0.0155	0.0124	0.0123	0.0165
25	10	0.0043	0.0087	0.0070	0.0063	0.0061
	30	0.0015	0.0010	0.0014	0.0018	0.0015
	5	0.0889	0.1027	0.1059	0.4390	0.1203
4	10	0.0444	0.0524	0.0626	0.1233	0.0535
	30	0.0148	0.0141	0.0198	0.0178	0.0132

t值(檢定$\hat{\theta}$與θ是否有顯著的差異)

6_{11}	n	0°=0徑	10°=0.17徑	45°=0.79徑	90°=1.57徑
	5	0.081	1.807	−0.830	0.952
100	10	0.742	−1.696	1.680	−0.238
	30	−0.153	0.382	1.401	−0.148
	5	0.281	−0.746	0.014	−0.131
25	10	−0.939	−0.850	0.774	0.475
	30	1.876	−1.428	0.463	−1.039
	5	0.312	−3.466**	−3.045**	1.249
4	10	1.669	−1.368	−1.345	−1.369
	30	−0.291	−1.153	0.500	−0.642

臨界值　5%　1.99　*

　　　　1%　2.63　**

$$P(|t_{n-1}| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = \frac{\alpha}{2}, \ \alpha = 0.05, \ t_{0.025,99} = 1.99$$

χ^2 一值（檢定樣本變異數與理論漸近變異數 6_θ^2 是否有顯著的差異）

6_{11}	n	0°＝0徑	10°＝0.17徑	45°＝0.79徑	90°＝1.57徑
	5	144.333**	125.169*	232.242**	181.447**
100	10	113.137	136.813**	102.464	164.952**
	30	97.515	121.385	129.914*	104.502
	5	176.433**	141.455**	140.542**	188.523**
25	10	198.903**	159.214**	144.616**	139.803**
	30	65.377**	98.476	122.391	105.452
	5	114.438	117.946	488.926**	133.984*
4	10	116.721	139.442	274.718**	119.216
	30	94.223	132.381	118.615	88.276

臨界值　5％　77.92—124.3　*
　　　　1％　70.06—135.8　**

$P(\chi^2_{(N)} > \chi^2_{\alpha,N}) = \alpha$，$\alpha = 0.05$，$x^2_{0.05,100} = 124.34$

偏度值

6_{11}	n	0°＝0徑	10°＝0.17徑	45°＝0.79徑	90°＝1.57徑
	5	0.617**	2.170**	0.054	0.009
100	10	0.000	0.497**	0.081	0.000
	30	0.002	0.079	0.001	0.112
	5	0.970**	0.200*	0.037	1.846**
25	10	1.648**	0.002	0.844**	0.056
	30	0.000	0.012	0.001	0.001
	5	0.000	0.014	3.107**	0.024
4	10	0.077	0.639**	5.152**	0.016
	30	0.033	0.097	0.003	0.028

臨界值　5％　0.1513　*
　　　　1％　0.3214　**

峯度值

σ_{11}	n	0°＝0 徑	10°＝0.17徑	45°＝0.79徑	90°＝1.57 徑
	5	5.615**	10.415**	4.853**	4.583**
100	10	2.536	6.359**	2.747	3.918*
	30	3.015	2.933	2.411	2.888
	5	8.293**	4.004*	3.449	11.591**
25	10	8.844**	3.295	6.890**	4.323*
	30	3.201	4.451**	2.493	3.196
	5	2.558	2.687	5.816**	2.553
4	10	2.852	3.863*	10.874**	3.354
	30	3.556	3.987*	2.581	3.124

臨界值	5 %	3.77	*
	1 %	4.39	**

N＝100個 $\hat{\sigma}_\theta^2$ 值的均數（在做成 θ 之信賴區間時用）

σ_{11}	n	理論的（與 θ 無關）	0°	10°	45°	90°
	5	0.0020	0.0023	0.0021	0.0032	0.0030
100	10	0.0010	0.0013	0.0012	0.0012	0.0015
	30	0.0003	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004
	5	0.0087	0.0012	0.0101	0.0204	0.0114
25	10	0.0043	0.0052	0.0051	0.0054	0.0065
	30	0.0015	0.0015	0.0014	0.0015	0.0016
	5	0.0889	0.1497	0.2168	0.2335	0.2425
4	10	0.0444	0.0624	0.0721	0.0614	0.1121
	30	0.0148	0.0170	0.0185	0.0187	0.0157

$\hat{\sigma}_\theta^2$ 值的中位數

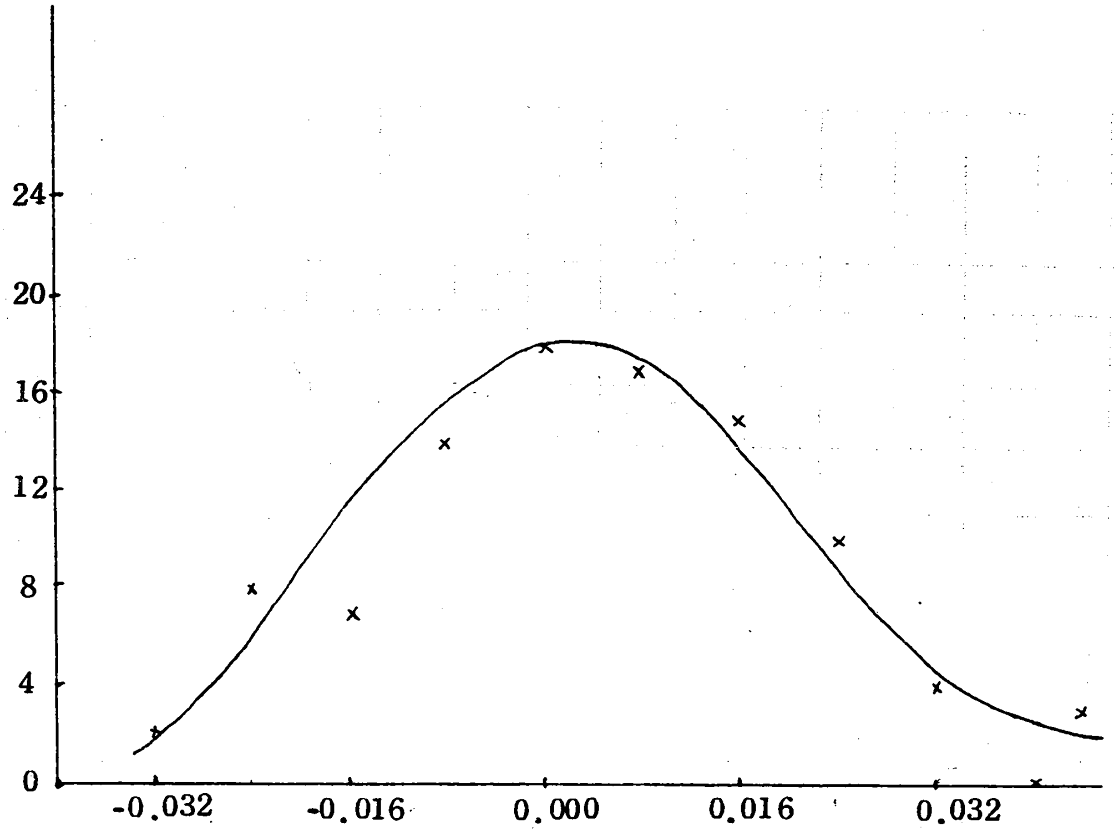
σ_{11}	n	0°＝0徑	10°＝0.17徑	45°＝0.79徑	90°＝1.57徑
	5	0.0014	0.0016	0.0019	0.0018
100	10	0.0010	0.0011	0.0009	0.0015
	30	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
	5	0.0061	0.0070	0.0064	0.0066
25	10	0.0037	0.0041	0.0042	0.0040
	30	0.0014	0.0013	0.0014	0.0014
	5	0.0484	0.0648	0.0529	0.0629
4	10	0.0348	0.0307	0.0271	0.0314
	30	0.0138	0.0130	0.0126	0.0131

信賴區間　（在N＝100中包含 θ 之指定值的 90％ 信賴區間的個數）

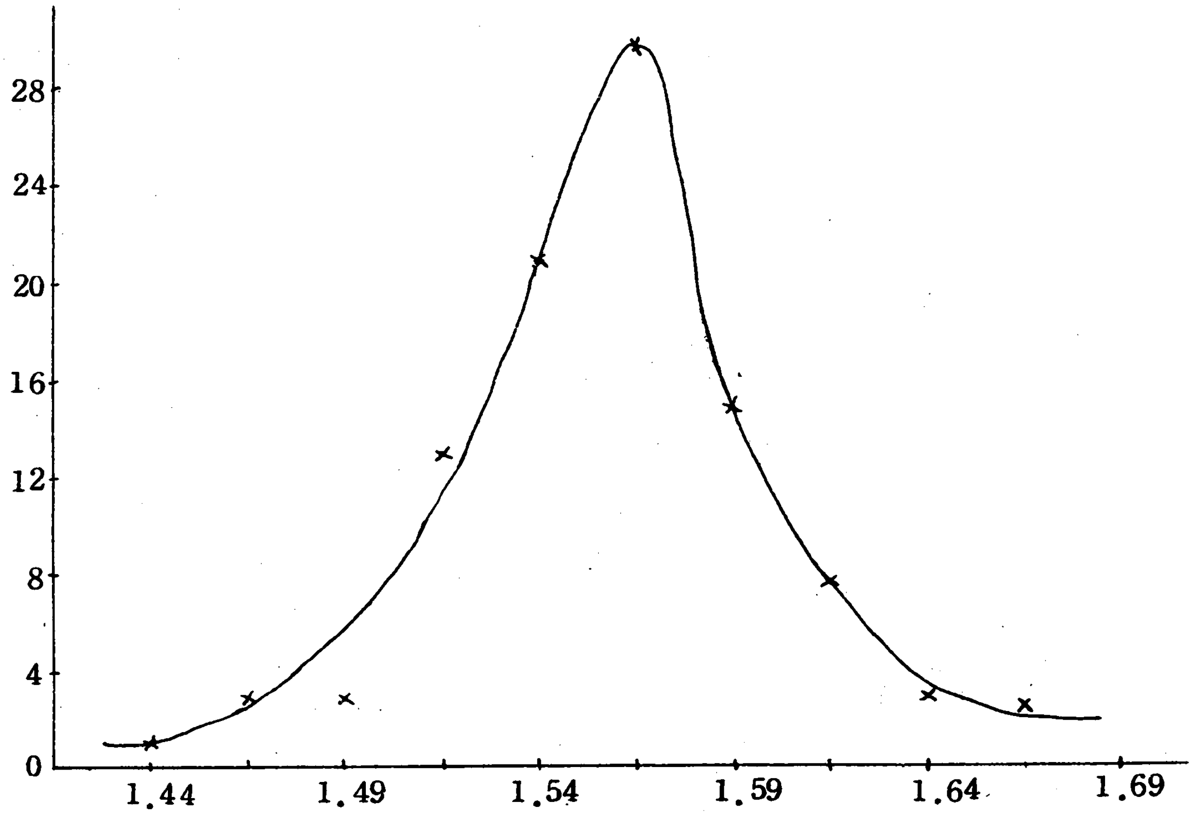
σ_{11}	n	0°	10°	45°	90°
	5	78**	82**	78**	81**
100	10	90	87	88	82**
	30	91	87	83*	88
	5	79**	76**	78**	74**
25	10	78**	80**	88	84*
	30	94	92	82**	89
	5	76**	78**	66**	79**
4	10	81**	79**	83*	82**
	30	90	86	85	86

臨界值　5％　84.22 − 95.88　*

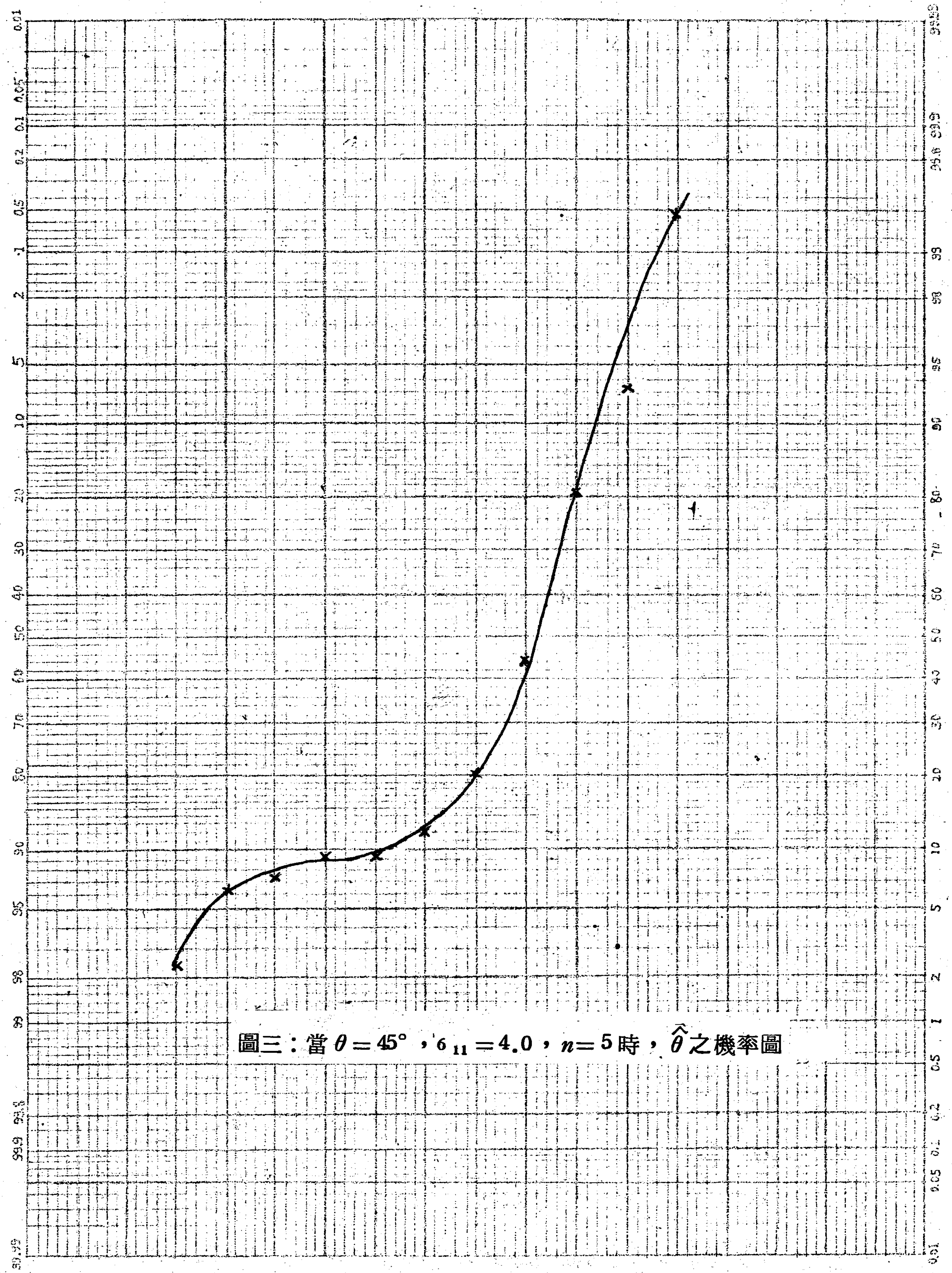
　　　　1％　82.35 − 97.65　**



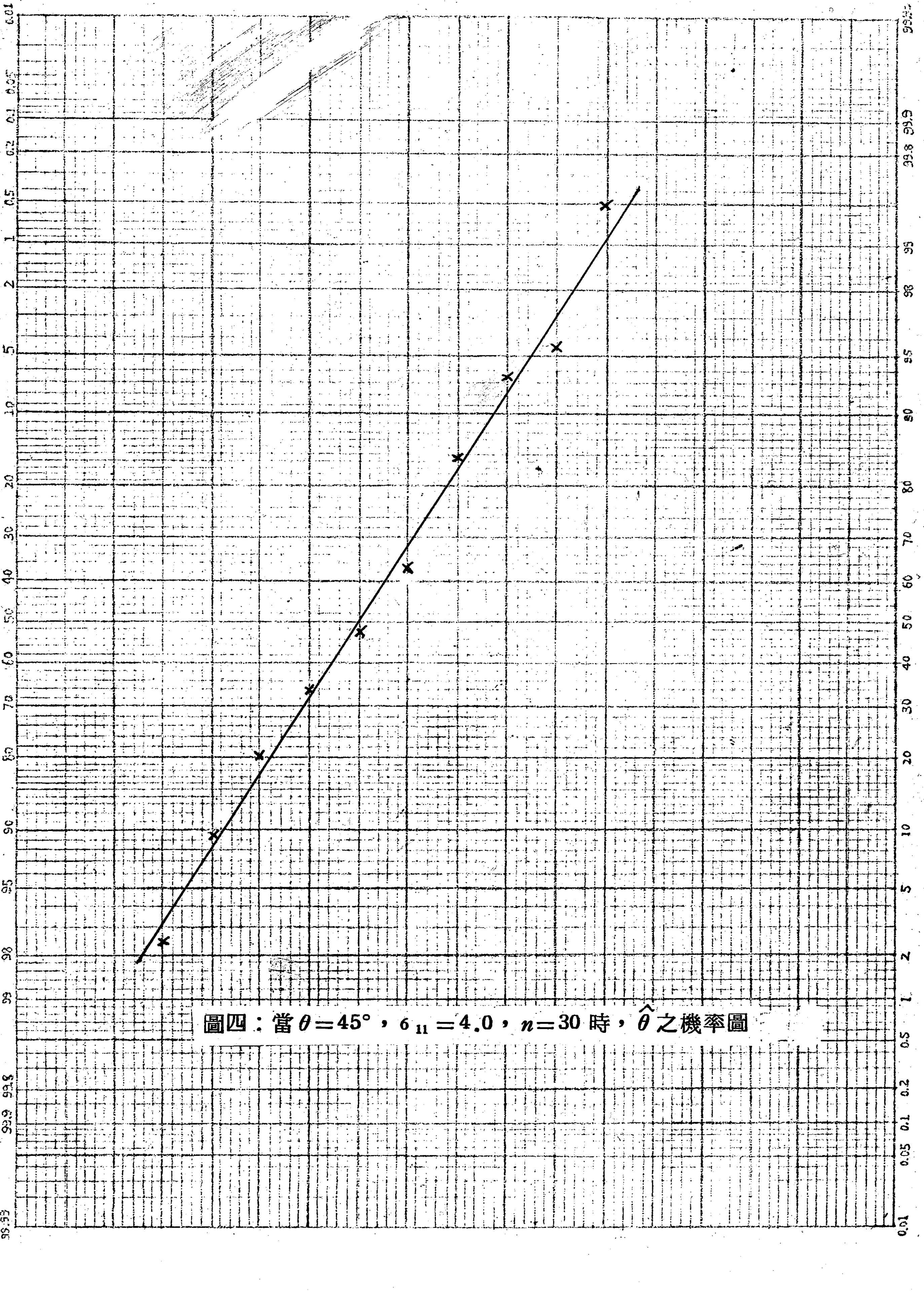
圖一：當 $\theta=0°$，$6_{11}=100$，$n=30$時，$\hat{\theta}$之直方圖 $\hat{\theta}\rightarrow N(0, 0.0003)$



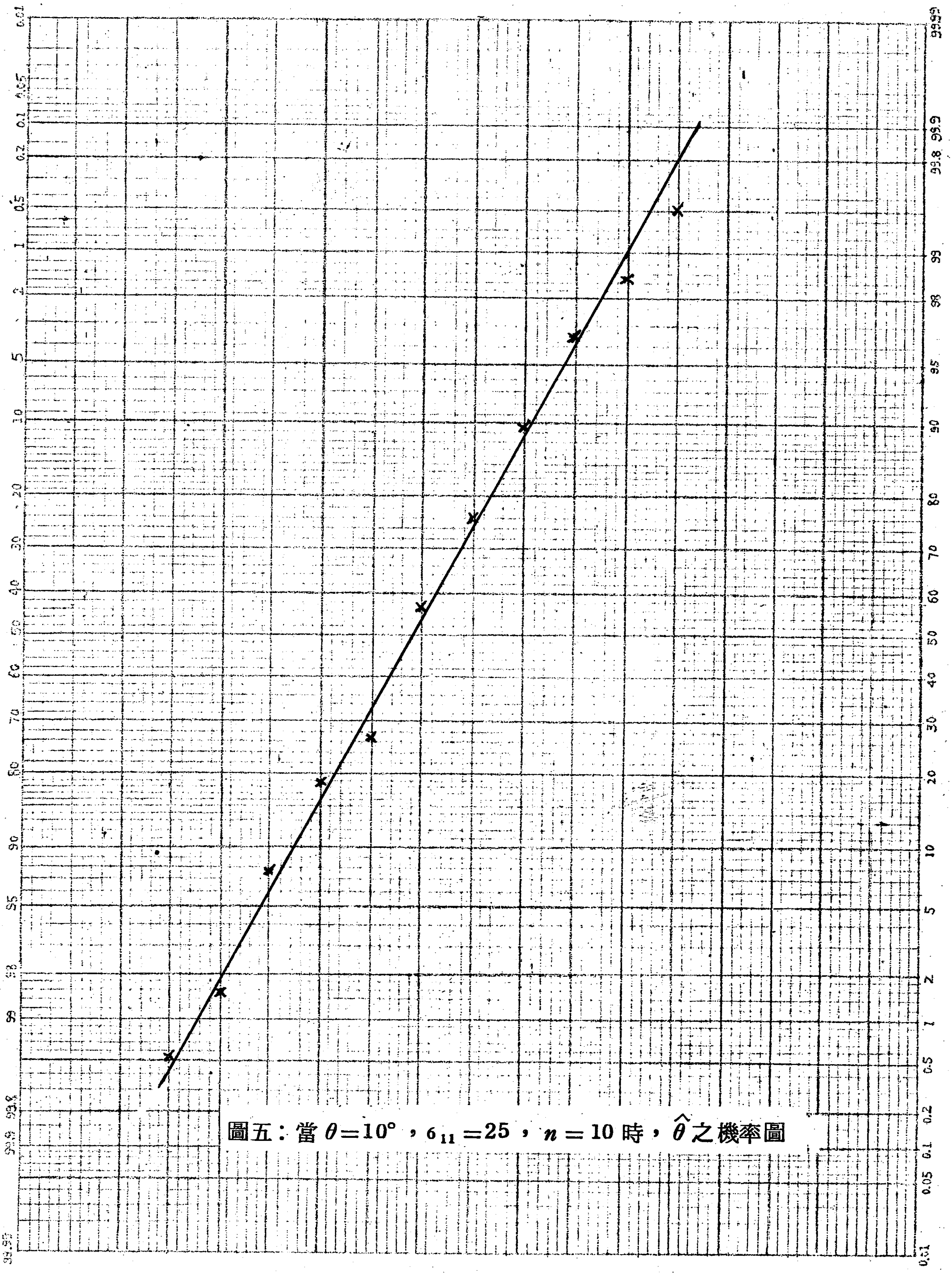
圖二：當 $\theta=90°$，$6_{11}=100$，$n=10$ 時，$\hat{\theta}$之直方圖，$\hat{\theta}\rightarrow N(1.57, 0.00102)$



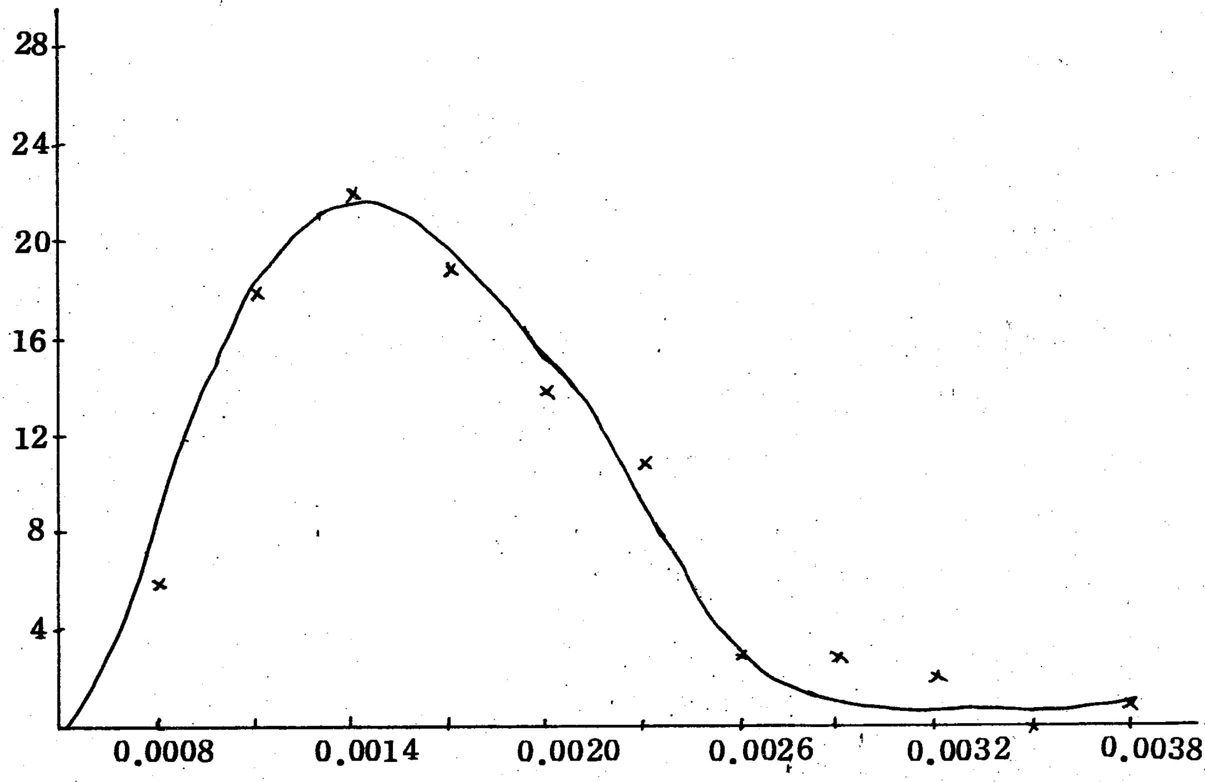
圖三：當 $\theta=45°$，$\sigma_{11}=4.0$，$n=5$ 時，$\hat{\theta}$ 之機率圖



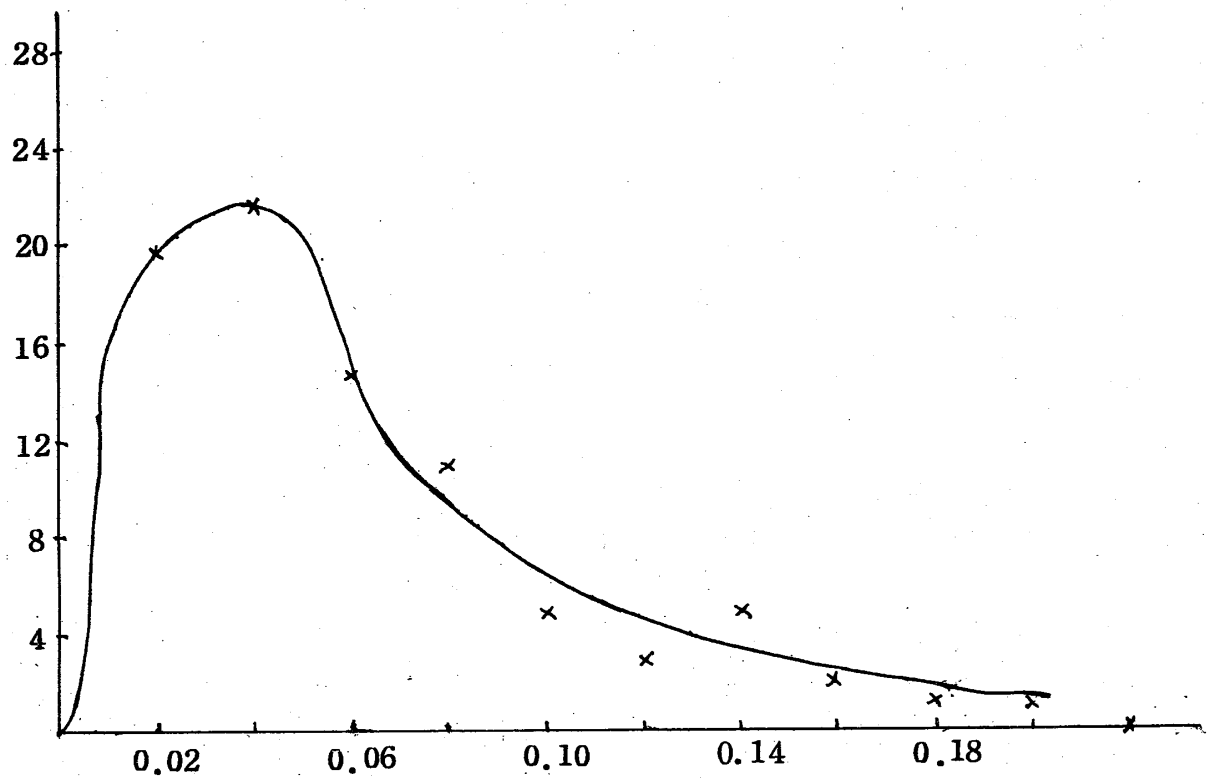
圖四：當 $\theta=45°$，$\sigma_{11}=4.0$，$n=30$ 時，$\hat{\theta}$ 之機率圖



圖五：當 $\theta=10^{\circ}$，$\sigma_{11}=25$，$n=10$ 時，$\hat{\theta}$ 之機率圖



圖六：當 $\theta=45°$，$\sigma_{11}=25$，$n=30$ 時，$\hat{\sigma}_{\theta}^2$ 之直方圖。



圖六：當 $\theta=0°$，$\sigma_{11}=4.0$，$n=5$時，$\hat{\sigma}_{\theta}^2$ 之直方圖

結果之討論

$\hat{\theta}$ 之經驗分配

當 θ 接近於 45° 時，A_{11} 接近於 A_{22} 且 $\tan^{-1}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}\right)$ 有相當大的起伏。但是，除非 σ_{11} 也接近於 σ_{22}，否則 $\hat{\theta}$ 所呈現的起伏並不大。根據我們在第二節中選擇 $\hat{\theta}$ 的準據，當 $\theta=0°$，10° 時，我們應得 $A_{11}>A_{22}$；當 $\theta=90°$ 時，我們應得 $A_{11}<A_{22}$。如果我們所求算得的矩陣A與準據不符，則我們將會得到相當差的 θ 值，但是此種情形並不常發生。

t 值（t-values）—— 即使當 n=5 時有很少之顯著 t 值。

x^2—值（Chi Square Values）—— 當 n=5，10 時，θ 之經驗分配似乎有過大之樣本變異數。當 n=30 時，樣本變異數較接近於漸近變異數。

偏度值（Skewness Values）—— 當 n=5，10時，有一些顯著值（significant Values）；當 n=30 時，則沒有。

峯度值（Kurtosis Values）—— 當 n=5 時，有較多的顯著值，n=10 時較少，n=30 時最少。

直方圖與機率圖（Histograms and Probability Plots）—— 大致上，θ 之分配呈現出近似於常態分配。圖 3 爲 θ 分佈之最差情況。

$\hat{\sigma}_\theta^2$ 之經驗分配與信賴區間

一般看來，信賴區間之長度似乎顯得太短，這表示 σ_θ 之估計值 $\hat{\sigma}_\theta$ 通常過小，或者是在常態分配之假設下而取得之臨界值（critical value(1.645)）過小。$\hat{\sigma}_\theta^2$ 之中位數（medians）與理論變異數相比，顯得較小。有些 $\hat{\sigma}_\theta^2$ 之均數則大於理論變異數。

我們可看出當 $\hat{\sigma}_{11}$ 接近於 $\hat{\sigma}_{22}$ 時，$\hat{\sigma}_\theta^2$ 變得很大。此種情況通常發生在樣本之大小等於 5 且 $\sigma_{11}=4.0$ 時。因此，$\hat{\sigma}_\theta^2$ 之均數有大於理論變異數的趨向。

直方圖 $\hat{\sigma}_\theta^2$ 之分配與 Chi-Square 分配頗爲接近。因爲我們不知其自由度（the degrees of freedom），故未將其分配圖畫在機率紙上。

参考書目

1. T. W. Anderson "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis," Gohn Wiley & Sons, New York, 1958.
2. Donald F. Morrison "Multirariate Statistical Methods".
3. Tranklin A. Graybill "An Introduction to Linear Statistical Models" Volume I, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1961.
4. Paul G. Hoel and Sidney C. Port and Charles J. Stone "Introduction to Probability Theory" Houghton Mifflin Company Boston, Mass.
5. Paul G. Hoel and Sidney C. Port and Charles J. Stone "Introduction to Statistical Theory".