一個多點界值 (Multi-point Boundary Value) 問題的存在性與唯一性定理

By M. Lipschutz 利馬定教授著

羅仁松譯

考慮如下的多點界值問題

$$1)\quad \begin{cases} \text{DE} & X^{(n)} = f\,(t, x, \ldots, x^{(n-1)}) \\ \text{BC} & \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ijk} X^{(j-1)}(t_k) = b_i;\ i=1 \ldots, u, \end{cases}$$

$$a \leqq t_1 \angle \ldots \angle t_n \leqq b.$$

式中 DE 爲 t 之函數 X 之一般 n 階微分方程式， BC 爲一般線性條件，規定 X 以及 X 之 n—1 次導函數於區間〔a, b〕中之給予點 t_i, $i=1, \ldots, n$ 之值。

這篇論文的目的除了在尋得 X 的存在性及唯一性之外，並且獲得〔a, b〕大小之估計量。最先對如上之多點問題加以研究的是 Nitcoletti〔1〕，但他祇討論到上述邊界條件的一個特殊情形，且未能證出唯一性 。之後， Whyburn〔2〕得到當邊界條件爲 $X^{(i)}(t_i) = b_i$形式時之存在性及唯一性。

爲方便計 將 1) 式用矩陣的形式表出。照一般習慣，置 $y_1 = x$, $y_2 = x^1, \ldots,$ $y_n = x^{n-1}$；且令 y 代表行向量 (y_i) ；M^k 代表矩陣 (m_{ijk}), $i, j, k=1, \ldots, n$。又令 b 表行向量 (b_i).

最後令 D 表矩陣 $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

則 1）式可改書成如下形式

$$2)\quad \begin{array}{ll} \text{DE} & y' - Dy = g \\ \text{BC} & \sum\limits_k M^k y(t_k) = b \end{array}$$

式中 g 爲一行向量 $g = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f(t, y) \end{pmatrix}$

對行向量 $y = (y_i)$ 令 $\| y \| = \operatorname*{Max}_i | y_i |$；對一矩陣

$A = (a_{ij})$；令 $\| A \| = \sup\limits_y \dfrac{\| Ay \|}{\| y \|}$，則易證得如下的關係

$\| A + B \| \leqq \| A \| + \| B \|$, $\| \alpha A \| = | \alpha | \, \| A \|$；（$\alpha$爲純量）

及 $\| AB \| \leqq \| A \| \, \| B \|$。同時令

$$P(t) = \left(\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} t^{j-1} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \ldots & t^{n-1} \\ 0 & 1 & 2t & \ldots & (n-1)t^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)\, t^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)! \end{pmatrix}$$

則可證得 $P(t)c$；$c = (c_i)$ 爲齊次方程式 (homogeneous equation) $y' - Dy = 0$ 之一般解。

在下定理中，吾人可證得 2) 式與一個形如

$y = \varphi(y) + \psi(y)$ 的積分方程爲同義。式中對任意之 y 而言，$\varphi(y)$ 爲 DE 之一個解。而 $\psi(y)$ 則爲齊次方程之一解，且使得 $\varphi(y) + \psi(y)$ 滿足 BC. 亦卽

〔定理1〕 在 $D = \{(t, y) \mid a \leqq t \leqq b, \|y\| \leqq k\}$ 中

$f(t, y) \in C$，又若 $\det[\sum_k M^k p(t_k)] \fallingdotseq 0$，

則在 D 中之連續函數 y 爲 2) 之一解，若且唯若 y 爲方程式

3) $y = \varphi(y) + P(t)\, c(y)$ 之一解

式中

$$4)\ \varphi(y) = \begin{pmatrix} \int_a^t \int_a^{\tau_n} \cdots \int_a^{\tau_2} f(\tau_1, y(\tau_1))\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n \\ \int_a^t \int_a^{\tau_n} \cdots \int_a^{\tau_3} f(\tau_2, y(\tau_2))\, d\tau_2\, d\tau_3 \ldots d\tau_n \\ \cdots \\ \int_a^t f(\tau_n, y(\tau_n))\, d\tau_n \end{pmatrix}$$

以及

$$5)\ c(y) = \left(\sum_k M^k p(t_k)\right)^{-1} \left(b - \sum_k M^k \varphi(y)(t_k)\right)$$

證：若 y 爲 2) 之一解。考慮函數 $\omega \equiv y - \varphi(y)$ 式中 $\varphi(y)$ 定義如 4)。則易證得 $\varphi(y)$ 爲 DE 之一解，亦卽 $\varphi(y)' - D\varphi(y) = g$

故 $\omega' - D\omega = y' - \varphi'(y) - Dy + D\varphi(y)$

$$=y' - Dy - \varphi(y)' + D\varphi(y)$$

$$=g-g=0$$

即 ω 亦為齊次方程式 $y' - Dy = 0$ 之一解

故必有一適當的 c 存在；使得 $\omega = p(t)\, c$ 於是 $y = \omega + \varphi(y) = \varphi(y) + p(t)c$。由於 y 又同時滿足 BC

故 $b = \sum_k M^k y(t_k) = \sum_k M^k \varphi(y)(t_k) + \sum_k M^k p(t_k)\, c$

或 $c = \left(\sum_k M^k p(t_k)\right)^{-1} \left(b - \sum_k M^k \varphi(y)(t_k)\right)$

故得 $y = \varphi(y) + p(t)\, c(y)$ 式中 $\varphi(y)$ 如 4) 所給，$c(y)$ 如 5) 所給，亦即 y 為 3) 之一解。

反之；設 y 為 3) 之一解。因 $\varphi(y)$ 滿足 DE；而 $p(t)\, c$ 為齊次方程式之解；於是

$$y' - Dy = \varphi(y)' - D\varphi(y) + P'(t)c - DP'(t)c$$

$$= g + 0 = g$$

同時 $\sum_k M^k y(t_k) = \sum_k M^k \varphi(y)(t_k) + \sum_k M^k P(t_k)\, c(y)$

$$= \sum_k M^k \varphi(y)(t_k)$$

$$+ \left(\sum_k M^k P(t_k)\right)\left(\sum_k M^k P(t_k)\right)^{-1}\left(b - \sum_k M^k \varphi(y)\, t_k\right)$$

$$= b$$

故 y 為 2) 之一解，即定理得證。

由上定理知，欲證 2) 式解之存在性及唯一性，祇須證明 3) 式解之存在及唯一卽可。因爲這可由重複漸進法完成，故吾人先證：

〔預理 1〕若在$D = \{(t, y) \mid a \leqq t \leqq b ; \|y\| \leqq k\}$ 中；$y \in C$

則在 D 中之 $\varphi(y) + P(t)\, c(y) \in C$。只要

$$6)\quad \max_i (b-a)^i \leqq \frac{K - BG\|b\|}{NH} ; i = 1, \ldots n,$$

式中之常數 N, B, G, H, 爲如下所示

$$7)\quad N = \max_D |f| ; B = \max_{[a,\, b]} \|P(t)\| ; G = \left\| \left(\sum_k M^k p(t_k) \right)^{-1} \right\|$$

$$H = 1 + BG \sum_k \| M^k \|$$

證：顯然地 $\varphi(y) + p(t)\, c(y)$ 在 D 中爲連續函數；故祇須再證

$\|\varphi(y) + P(t)\, c(y)\| \leqq k$ 卽可

$$\|\varphi(y)\| \leqq \max_i \left\{ \left| \int_a^t \cdots \int_a^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, y(\tau_i)) d\tau_i \ldots d\tau_n \right| \right\}$$

$$\leqq \max \left(\left| \int_a^t \cdots \int_a^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, y(\tau_i)) \right| d\tau_i \ldots d\tau_n \right| \right)$$

$$\leqq \max_i (b-a)^i N$$

同時$\|c(y)\| \leqq \left\| \left[\Sigma M^k P(t_k) \right]^{-1} \right\| \left\| b - \sum_k M^k \varphi(y)(t_k) \right\|$

$$= G \left[\|b\| + \max_i (b-a)^i N \sum_k \|M^k\| \right]$$

故 $\| \varphi(y) + P(t)\, c(y) \|$

$$\leqq \| \varphi(y) \| + \| P(t) \| \; \| c(y) \|$$

$$\leqq \underset{i}{\mathrm{Max}}\,(b\text{-}a)^{i} N - BG \| b \| + BG\, \Sigma \| M^{k} \| \underset{i}{\mathrm{Max}}\,(b\text{-}a)^{i} N$$

$$\leqq \underset{i}{\mathrm{Max}}\,(b\text{-}a)^{i}\, N\, H + B\, G \| b \| \leqq K$$

故預理得證。

其次證明

〔預理 2〕 若 $f(x, y)$ 對某些常數 β 及一切 D 中之t, y, y^* 滿足

8) $| f(t,y) - f(t, y^*) | \leqq \beta \| y - y^* \|$

又若對某些 $\lambda < 1$ 及 7) 式之 H 有

9) $\underset{i}{\mathrm{Max}}\,(b\text{-}a)^{i} \leqq \dfrac{\lambda}{BH}$ 之關係則對所有 D 中之 $y \in C$, $y^* \in C$;

$\mu = \varphi(y) + P(t)\, c(y)$ 以及 $\mu^* = \varphi(y^*) + P(t)\, c(y^*)$ 必有

10) $\| \mu - \mu^* \| \leqq \lambda \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} \| y - y^* \| \; (\lambda < 1)$ 之結果

證：

由於

$$\| \varphi(y) - \varphi(y^*) \| \leqq \underset{i}{\mathrm{Max}} \left(\int_a^t \cdots \int^{\tau_{i+1}} \left| f(\tau_i, y(\tau_i)) - f(\tau_i, y^*(\tau_i)) \right| d\tau_i \ldots d\tau_n \right) \leqq \underset{i}{\mathrm{Max}} \left(\int_a^t \cdots \int_a^{\tau_{i+1}} \beta \| y^*(\tau_i) \| d\tau_i \ldots d\tau_n \right)$$

$$\leqq \beta\, \underset{i}{\mathrm{Max}}\,(b\text{-}a)^{i} \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} \| y - y^* \|$$

同理可知

$$\| C(y)-C(y^*)\| \leqq \| [\sum_k M^k P(t_k)]^{-1} \| \| \sum_k M^k \{\varphi(y)(t_k)$$

$$-\varphi(y^*)(t_k)\} \| \leqq \beta G \operatorname*{Max}_i (b-a)^i \sum_k \| M^k \| \operatorname*{Max}_{[a,b]} \| y-y^* \|$$

於是

$$\| \mu-\mu^* \| \leqq \| \varphi(y)-\varphi(y^*) \| + \| P(t) \| \| c(y)-c(y^*) \|$$

$$\leqq \beta \operatorname*{Max}_i (b-a)^i \operatorname*{Max}_{[a,b]} \| y-y^* \| \left(1 + G B \sum_k \| M^k \| \right)$$

$$\leqq \beta H \operatorname*{Max}_i (b-a)^i \operatorname*{Max}_{[a,b]} \| y-y^* \| \leqq \lambda \operatorname*{Max}_{[a,b]} \| y-y^* \|$$

故預理得證

根據上面兩個預理之假設，吾人使用一般的重複漸進法 (Method of iteration), 或者用完整測度空間 (Complete Metric spaces) 中的縮像定理 (Contracting mapping theorem), 可得數列 $y=\varphi(y_{n-1})+P(t)\ c(y_{n-1})$, $y_0\equiv 0$ 必一致收斂到 D 中的一個連續函數 y，而 y 滿足積分方程 $y=\varphi(y)+P(t)\ c(y)$；同時此解爲唯一。故得如下之定理。

〔定理2〕若在 $D=\{(t,y) \mid a \leqq t \leqq b;\ \| y \| \leqq k\}$中，$f(t,y) \epsilon C$ 且設

i) $\det [\sum_k M^k P(t_k)] \neq 0$

ii) 對某些 $\beta > 0$及 D 中所有的 t, y, y* 有

$$| f(t,y)-f(t,y^*) | \leqq \beta \| y-y^* \|$$

iii) 對某些 $\lambda < 1$ 有

$$\operatorname*{Max}_{i} (b - a)^{i} \leqq \operatorname{Min} \left\{ \frac{K - BG \| b \|}{NH}, \frac{\lambda}{BH} \right\}$$

式中 N, B, G及 H 依照 7)中之定義。

則多點界值問題

DE $\qquad y' - D\,y = g$

BC $\qquad \sum_{k} M^{k} y\,(t_{k}) = b$

在 D 中存在有唯一之解 y。

式中

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \text{及} g = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (fx,y \end{pmatrix}$$

參考資料：

1. P. Nicoletti, Atti della R. Accademie Delle Science Di Torino Vol. 33 (1897 p. 746f.)

2. W. H. Whyburn, Annals of Mathematics Vol. 30 (1929) p. 31f.

Brief Summary

In the paper, we deal with the multi-point boundary value problem

$$\text{DE} \qquad X^{(n)} = f(t, X, \cdots, X^{(n-1)})$$

$$\text{BC} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ijk} X^{(j-1)}(t_k) = b_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$a \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq b$$

Here DE is a general n-th order differential equation for a function X of t and BC are general linear conditions prescribed for X and its n-1 derivatives at given points t_i, $i = 1, \cdots, n$ in the interval [a, b] .We obtain an existence and uniqueness theorem for X for this problem, and in addition to obtain a quantitative estimate for the size of [a, b].